i løbet af 1900-tallet afmonterede mange af de klippefaste videnskabelige overbevisninger fra 1800-tallet og erstattede dem med nye, mere præcise, men også mere relativerende lovmæssigheder. Det viste sig nemlig gang på gang, at det endegyldige bevis for dette eller hint ikke lod sig finde, og at det, man tidligere troede var så nemt og entydigt, faktisk var særdeles kompliceret. De kulturpessimistiske strømninger, der modstræbende havde accepteret videnskabens sejrsgang, kunne derfor langsomt udvikle en ny spontanitet, efterhånden som det blev tydeligt, hvor lidt man i naturvidenskaben egentlig vidste og kunne gøre.

Formaliseringens grænser i matematik og logik

Ved indgangen til 1900-tallet var mange forskere enige om, at matematik og logik nød en speciel status inden for de videnskabelige fag til forskel fra andre discipliner såsom kemi, fysik og biologi. Matematik og logik blev anset som perfekte, statiske og evige former for viden, der ikke nødvendigvis havde empiriske koblinger til virkeligheden. De blev derfor defineret som formelle videnskaber. “Hvordan er det muligt,” spurgte Albert Einstein (1879-1955) i 1921, “at matematik, som er et produkt af den menneskelige tanke uafhængig af erfaringen, passer så fortræffeligt til de objekter, vi møder i den fysiske virkelighed?”, og fysikeren Eugene Wigner (1902-95) talte for mange kolleger, når han udbredte sig om “matematikkens urimelige effektivitet inden for naturvidenskaberne.”

Alligevel skulle det vise sig, at forsøgene på at forstå virkeligheden ud fra den rene matematik og logik heller ikke gik ram forbi af ubestemmeligheder og paradokser. I løbet af det 20. århundrede åbenbaredes der en lang række problemer omkring matematikkens fundamenter, og selv de mest basale principper omkring hvad et tal er, hvad et bevis er, og hvorvidt matematiske objekter eksisterer eller ej, blev debatteret i indædte kontroverser. På en måde var det Richard Dedekind (1831-1916) og Georg Cantor (1845-1918) fra kapitel fem, der startede denne “grundlagskrise” med deres meta-matematiske overvejelser omkring, hvad uendelige mængder og tal er. Men der skulle gå 20-30 år, før det gik op for enkelte matematikere hvilke konsekvenser, disse overvejelser reelt havde for forsøgene på at formalisere og aritmetisere hele matematikken. Men i og med at formaliseringens grænser blev påvist af tænkere som Bertrand Russell (1872-1970), Kurt Gödel

1.	2,	3	9	7	2	0	4	8	1	7	…
2.	14,	5	2	6	7	1	3	8	0	9	…
3.	0,	4	5	8	3	1	0	1	2	3	…
4.	292,	2	7	5	4	1	8	8	3	1	…
5.	12,	0	0	2	2	0	0	0	2	5	…
6.	1,	9	9	9	9	0	4	6	8	1	…
⋮								⋱			
	0,	**6**	**8**	**3**	**1**	**7**	**5**	**…**			

Med sit berømte diagonalbevis kunne Cantor vise, at de reelle tal ikke kunne tælles, det vil sige sættes i en en-til-en korrespondance med de naturlige tal 1, 2, 3, 4..., og at de reelle tal derfor måtte have en "højere grad af uendelighed" end de naturlige eller de rationelle tal. Beviset går i al sin simpelhed ud på at forsøge at lave en liste af alle mulige reelle tal. Seks af dem er listet til højre i figuren. Tallene til venstre er de korresponderende naturlige tal, som "tæller" de reelle tal, og man skal forestille sig, at rækken fortsætter i det uendelige. Nu kan man blot skrive et nyt reelt tal nederst i listen, som dannes ved at udskifte den første decimal på det første relle tal med et tilfældigt andet, dernæst den anden decimal på det andet reelle tal, og så fremdeles. Dette nye tal forneden kan umuligt være i listen, fordi tallet jo ikke kan være ens med det første tal, idet den første decimal er anderledes. Det kan heller ikke være ens med det andet tal, fordi den anden decimal er forkert osv. Idet vi jo fra start antog, at listen indeholder *alle* de reelle tal, har vi fundet en modstrid. Ergo kan man ikke lave en tællelig liste af de reelle tal. De reelle tal har således en højere orden af uendelighed end de naturlige tal.

(1906-78) og Alan Turing (1912-54), opstod der en art matematisk revolution: opdagelsen af fundamentalt nye koncepter om matematisk beregnelighed og uberegnelighed, nye tanker om kompleksitet og tilfældighed og ikke mindst forudsætningerne for udviklingen af den moderne computer.

Matematikken havde i løbet af meget kort tid fået status som sandhedens talerør – faktisk i så høj grad, at man mente at kunne forklare hele virkelighedens struktur ud fra kombinationer af matematiske objekter. F.eks. udviklede førnævnte tysk-russiske matematiker Georg Cantor i årene 1871-84 en teori om de uendelige mængder, der forbavsede ham selv så meget, at han i et brev til en ven skrev: "Jeg ser det, men jeg tror ikke på det." I en serie af artikler mellem 1874 og 1897 beviste han blandt andet, at den uendelige mængde af hele tal havde et lige antal af medlemmer; at antallet af punkter på et linjestykke er lig med antallet af punkter på en uendelig linje og på en flade, og at antallet af såkaldte transcendentale tal – som π og e – er meget større end antallet af hele tal. Det hele lød så forrykt, at selv jesuitterne mente, at de nu igen kunne bevise Guds og treenighedens eksistens.

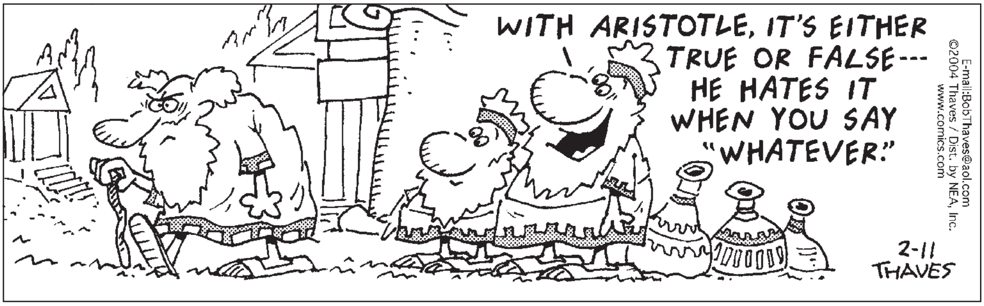
Den slags anvendelser holdt Cantor sig dog fra. I stedet mente han, at man kunne slutte sig til geometriens og dermed rummets opbygning ved at opdele et linjestykke i dimensionsløse punktmængder, altså talmængder, og derudfra konstruere kontinuet som en bestemt egenskab ved disse punktmængder. Cantors mængdelære og hans diagonalbevis (se diagrammet) viste, at der er forskellige grader af uendelighed. Størrelsen af mængden af reelle tal er for eksempel meget større end mængden af naturlige tal. Så selvom der findes en uendelig række af positive hele tal, så vil disse kun udgøre en forsvindende lille brøkdel af antallet af reelle tal. Desuden mente Cantor, at der ikke findes noget uendeligt sæt af tal, som er større end mængden af positive hele tal og samtidig mindre end mængden af reelle tal, hvilket han brugte til at formulere en hypotese om kontinuets beskaffenhed.

Det var tydeligt at se, at hele denne jongleren med tal og mængder kom fra en uhørt fantasifuld og original tænker, men man kunne lige så vel spørge, om det overhovedet var matematik? Reaktionerne blandt Cantors kolleger var i hvert fald ekstreme. Enten elskede de det, eller også hadede de det. Den tyske matematiker David Hilbert (1862-1943) forgudede teoriens abstraktionsgrad og generalitet og proklamerede, at “ingen skal udstøde os fra det paradis, som Cantor har skabt for os”, mens den franske matematiker Henri Poincaré (1854-1912) erklærede, at “senere generationer vil anse mængdelæren som en sygdom, af hvilken man er blevet helbredt.” Det var i hvert fald første gang en matematiker så konsekvent havde brugt matematik til at tænke over, hvad selve det matematiske apparat er i stand til at udsige. Det var meta-matematik. For tilhængerne af Cantor indvarslede mængdelæren en ny periode, hvor man håbede på at kunne komme til bunds i de logisk-matematiske strukturer, som styrer denne verden, og hvor man ved hjælp af et begrænset sæt af selvindlysende sandheder ville kunne frembringe en matematisk formalisme, der ikke længere var plaget af sprogets og fornuftens flertydigheder.

Men det skulle vise sig, at Cantors mængdelære samtidig indeholdt kimen til enden på selv samme håb om endelig matematisk afklaring. Man opdagede snart efter, at ikke kun vores sprog og intuitive menneskelige fornuft var begrænset. Selve det naturvidenskabelige ideal, den urørlige logiske og matematiske formalisme, viste sig at være modtagelig for selvmodsigelser. Bertrand Russell var den første, der opdagede, at Cantors mængdelære kunne føre til nogle grimme paradokser. Det var inden, han sendte sit brev til Gottlob Frege (1848-1925) i 1902 (s. 219). Russell spurgte sig selv: hvilke egenskaber har mængden af alle delmængder af den universelle mængde (dvs. den, som indeholder alt)? Problemet var, at Cantors hierarki af mængder indebar, at mængden af alle delmængder af en given mængde altid var større end mængden selv. Det var på den måde, kardinaltallene var opbygget. Men når man kigger på den universelle mængde, så kan mængden af alle delmængder af den universelle mængde umuligt være større end den universelle mængde – af den simple årsag, at den universelle mængde allerede indeholder alt. Paradokset minder om det klassiske barber-paradoks, der fortæller om en barber, der barberer alle, som ikke barberer sig selv. Men hvem – kan man spørge – barberer barberen? Ifølge definitionen barberer han kun sig selv, når han ikke barberer sig selv. Og det er umuligt. Med hensyn til barberen kan man selvfølgelig hurtigt finde en vej ud af paradokset ved enten at nægte, at en sådan barber overhovedet eksisterer, eller ved at sige at han har fuldskæg eller ingen skægvækst. Men hvad kan der være galt med hensyn til Russells paradoks omkring mængden af alle mængder, der ikke er medlem af sig selv?

Det var et problem. Der viste sig også en masse andre og lignende paradokser, bl.a. formuleret af Cesare Burali-Forti (1861-1931), Julius König (1849-1913) og Jules Richard (1862-1956). Grundlagskrisen fik mange matematikere til at spørge sig selv, om det ikke var bedre at trække sig tilbage til ældre og mere sikre måder at tænke matematik på. Der udvikledes hurtigt tre forskellige skoler, som havde hver deres filosofiske bud på en vej ud af matematikkens grundlagskrise: konstruktivisterne, også kaldet intuitionisterne; logicisterne med Bertrand Russell og Alfred North Whitehead (1861-1947) som fortalere; og formalisterne med David Hilbert som den mest berømte frontfigur.

Den mest kendte intuitionist – eller konstruktivist – var den hollandske matematiker Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). Han brød sig ikke om mængdelæren. Han kaldte det for "teologisk" matematik. Hvis matematikere vil bevise en tings eksistens, sagde han, skal de kunne vise den eller beregne den, og ikke bruge den slags tricks, hvor man først antager, at en ting ikke eksisterer, hvorefter man viser, at det fører til en selvmodsigelse. Denne form for logik bliver også kaldt *reductio ad absurdum*, reduktion til det absurde. Brouwer mente, at fremgangsmåden i sig selv var absurd. Hvis man skal bevise, at noget eksisterer, skal man kunne angive en endelig procedure, der konstruerer det. Brouwer nægtede derfor også gyldigheden af det velkendte *tertium non datur* – det udelukkede tredjes princip, der stammer fra Aristoteles (384-322 f.v.t.), og som siger, at der for ethvert udsagn P gælder, at P er enten sandt eller falsk.



Aristoteles' *tertium non datur* siger, at der for ethvert udsagn P gælder, at P er enten sandt eller falsk. Brouwer accepterede ikke dette, i hvert fald så længe P indeholdt en uendelig række af tal · Distr. PIB Copenhagen.

Inspireret af vitalismen opponerede Brouwer også mod matematikernes "atomistiske" forståelse af tid og rum. At forestille sig tiden som en linje fyldt op af punktmængder, eller at forestille sig det kontinuerte rum som et uendelig tæt sammenrend af dimensionsløse punkter, var for Brouwer en matematisk idealisering, ikke virkelighed. Det var et godt værktøj til at modellere fysiske fænomener, utvivlsomt, men det var ikke i nærheden af at kunne påstå at være objektiv viden om tidens og kontinuets "væsen". For at kunne forstå dette kontinuum måtte der være noget mere; noget som ikke kan fanges af lingvistiske, formelle og logiske strukturer. Dette "mere" var individets *intuition*. Brouwer mente, at han hermed havde præciseret Immanuel Kants (1724-1804) ide om menneskets intuitive erkendelse af rum og tid – det såkaldt syntetiske apriori, som Kant havde udviklet i sit forsøg på at sammentænke Leibniz' (1646-1716) og Newtons (1643-1727) positioner (s. 137-139). Kant havde blot forvekslet selve kontinuet med en bestemt geometri. "Den oprindelige fortolkning af kontinuet hos Kant og Schopenhauer som en ren apriori intuition kan i princippet opretholdes", fastslog Brouwer. Blandt væsentlige forgængere for Brouwers intuitionisme kan man finde førnævnte matematiker Henri Poincaré. Poincaré havde dog en mindre individualistisk tilgang til intuitionen end Brouwer, da han argumenterede for, at vores umiddelbare forestilling af tid og rum var resultatet af en evolutionær proces.

Brouwer var fortaler for en konstruktivistisk matematik, som var baseret på opbyggende beviser og ikke på logisk baserede følgeslutninger. Ifølge ham skulle matematik være konstruktiv og konkret, og ikke forlade sig på logiske reduktioner og selvrefererende luftkasteller. Andre matematikere, logicisterne, gik den stik modsatte vej, som f.eks. italieneren Giuseppe Peano (1858-1932). Han ville gøre matematikken abstrakt i en sådan grad,

362 PROLEGOMENA TO CARDINAL ARITHMETIC [PART II

$\ast$54·42. $\vdash :: \alpha \in 2 . \supset :. \beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \in \iota``\alpha$

Dem.

$\vdash . \ast 54\cdot 4 . \quad \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \mathsf{v} . \beta = \iota`x . \mathsf{v} . \beta = \iota`y . \mathsf{v} . \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

$[\ast 24\cdot 53\cdot 56 . \ast 51\cdot 161] \quad \equiv : \beta = \iota`x . \mathsf{v} . \beta = \iota`y . \mathsf{v} . \beta = \alpha \qquad (1)$

$\vdash . \ast 54\cdot 25 . \mathrm{Transp} . \ast 52\cdot 22 . \supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`x . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`y :$

$[\ast 13\cdot 12] \quad \supset \vdash : \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota`x . \alpha \neq \iota`y \qquad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota`x . \mathsf{v} . \beta = \iota`y :$

$[\ast 51\cdot 235] \quad \equiv : (\exists z) . z \in \alpha . \beta = \iota`z :$

$[\ast 37\cdot 6] \quad \equiv : \beta \in \iota``\alpha \qquad (3)$

$\vdash . (3) . \ast 11\cdot 11\cdot 35 . \ast 54\cdot 101 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

$\ast$54·43. $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . \ast 54\cdot 26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[\ast 51\cdot 231] \quad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[\ast 13\cdot 12] \quad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . \ast 11\cdot 11\cdot 35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . \ast 11\cdot 54 . \ast 52\cdot 1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Det tog Russell og Whitehead 362 sider at komme frem til, at resultatet nederst er logisk. *Principia Mathematica* (1910-13).

at den kunne undgå enhver berøring med det naturlige sprog og dermed undgå den menneskelige fejlbarlighed. Dette skulle ske ved udviklingen af en såkaldt symbolsk logik, der var konsistent og fejlfri, og som kun behøvede at referere til sig selv. Bertrand Russell og Alfred North Whitehead forsøgte at følge Peanos idealer i deres monumentale værk *Principia Mathematica* (1910-13), hvor de brugte et helt bind til at bevise, at 1+1 = 2. De brød argumenterne ned i så små stumper, at det tog dem hundreder af sider og tusinder af mængdeteoretiske overvejelser og logiske følgeslutninger for at komme frem til dette storslåede resultat. Russell og Whitehead forsøgte at gendrive Kants forestillinger om det syntetiske apriori inden for aritmetikken, ligesom Einstein havde gjort det få år før inden for geometrien ved at vise, at universet bedst kan beskrives ved en ikke-euklidisk geometri; at der med andre ord ikke forud for vores bevidsthed fandtes nogen ren geometri, der var bedst egnet til at udtrykke vores erfaring. Russells og Whiteheads parallelle "anti-kantianske" program skulle vise, at talteori kunne deduceres ud fra ren logik – altså at tal og alle deres egenskaber i bogstaveligste forstand kun var logiske konstruktioner. Deres anstrengelser førte til en række kontroverser. Mere om dem om lidt.

Den tredje matematiske skole fra begyndelsen af 1900-tallet, som havde (og har) stor indflydelse på praktiserende matematikere, var formalisterne. Formalisternes fremmeste fortaler var den tyske matematiker David Hilbert, der ligesom Kant kom fra Königsberg. Han forsøgte at finde en mellemvej mellem intuitionisternes evigt foranderlige univers af åbne objekter og logicisternes frosne og platoniske verden af uforanderlige former.

I år 1900 holdt Hilbert en tale, hvor han fremlagde en liste med 23 matematiske problemer, som gerne skulle løses af matematikerne i det kommende århundrede. Når det var gjort – sådan var drømmen – kunne matematikerne en gang for alle læne sig tilbage og nyde den komplette formalisering, som var hævet over enhver usikkerhed, og som før eller siden – hvis man anstrengte sig tilpas meget – ville kunne besvare ethvert matematisk spørgsmål, der endnu var åbent. Det ville være enden på matematik. Den aksiomatiske metode skulle føres til ende, og man skulle eliminere al sproglig usikkerhed og intuitiv tænkning ved at opbygge et kunstigt sprog, der var præcist, komplet og, som han udtrykte det, "mekanisk".

I modsætning til Brouwer mente Hilbert, at ethvert matematisk udsagn kunne vises at være sandt eller falskt efter et endeligt antal af operationer – lidt ligesom en computeralgoritme, der tygger sig igennem masser af tal for til sidst at finde en løsning. Da matematik jo er, som Hilbert sagde, "en leg med meningsløse symboler på et stykke papir", behøvede symbolerne blot at følge nogle syntaktiske regler, hvorefter man ved hjælp af logiske følgeslutninger og et lille sæt af modsigelsesfrie og uafhængige aksiomer – altså nogle principper, som accepteres uden bevis – kunne starte legen. Man kunne så manipulere symbolerne efter reglerne uden at lade sig forvirre af, hvad symbolerne betød. Hilberts såkaldte "Entscheidungsproblem" (beslutningsproblem) sigtede altså på at etablere et sådant fuldendt formelt system, og de fleste praktiserende matematikere ville have været lykkelige, hvis dette ambitiøse program var lykkes. Det eneste problem var blot, at det var umuligt.